Nafouz

التمرين الأول:(4 نقــاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$، نعتبر النقط $A\left(3;1;0\right)$، $B\left(1;2;0\right)$، $C\left(3;2;1\right)$

و $D\left(0;0;m\right)$ حيث m عدد حقيقي موجب ، (Q) مستوي معرف بـ $\begin{cases} x=2-2\alpha+\beta \\ y=\frac{3}{2}-4\alpha+2\beta \ ;(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ z=-5\alpha \end{cases}$

1) أ*/ أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $Cos\widehat{ABC}$ و $Sin\widehat{ABC}$.

ب*/ أحسب مساحة المثلث ABC .

ج*/ بين أن $\vec{n}(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكــارتية له .

د*/ بين أن $ABCD$ رباعي وجوه و أن حجمـه : $V=\dfrac{2m+5}{6}uv$

2) أ*/: بين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية : $-2x+y=\dfrac{-5}{2}$.

ب*/ استنتج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان و أنهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلـه الوسيــطي.

ج*/ أحسب $d\left(D;(Q)\right)$ ثم استنتج بدلالة m المسافة بين النقطة D و المستقيم (Δ).

3) لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

أ*/ بين أنه من اجل عدد حقيقي m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

ب*/عين قيمة m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m).

4) أكتب معادلة المستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) و يمس سطح الكرة (S_m).

التمرين الثاني:(4 نقــاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث $11x-5y=2$

أ*/ أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 4[11]$

ب*/ استنتج حلول المعادلة (E).

2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، نضـــع : $a=5n+2$ و $b=11n+4$

أ*/ عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

ب*/عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$

ج*/ استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما.

3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$

أ*/ بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B .

ب*/ استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B.

Nafouz

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث : $\begin{cases} 2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i \end{cases}$

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(o\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين: $z_A=1-i$ و $z_B=2+\sqrt{3}+i$.

أ*/ اكتب z_A على الشكل الأسي .

ب*/ بين أن : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج الشكل الأسي للعدد z_B

ج*/هل توجد قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول؟

3) أ*/ أوجد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

ب*/ احسب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$. (مقدرة بوحدة المساحة)

ج*/ عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث: $\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$

د*/ عين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل، ثم اوجد z_I لاحقة مركز ثقله.

4) نضع: $f=ros$ (يرمز o إلى تركيب التحويلين S و r) .

أ*/عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ب*/ أوجد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S (مقدرة بوحدة المساحة).

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$ ، ما طبيعة المثلث OMM' ؟

ب*/عين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$

1) أ*/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

ج*/ أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ*/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D') معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln 2+e$ عند $+\infty$ و عند $-\infty$ على الترتيب.

ب*/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (D) و (D').

ج*/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln 2+e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_f).

3) أرسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f)

4) ليكن (D_m) المستقيم الذي معادلته : $y=mx-m\left(e+\frac{\ln 2}{2}\right)+\frac{\ln 2}{2}$ حيث m وسيط حقيقي.

أ*/ بين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln 2}{2}+e\,;\,\frac{\ln 2}{2}\right)$.

ب*/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f)

5) نضع: $I=\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\left[f(x)-(x-e)\right]dx$ ، $I_n=\int_0^1 \ln\left(1+X^n\right)dX$ ، n عدد طبيعي غير معدوم

أ*/ فسر هندسيا العدد I و احسب العدد I_1.

ب*/ بين أن: $0\le I_n\le \ln 2$

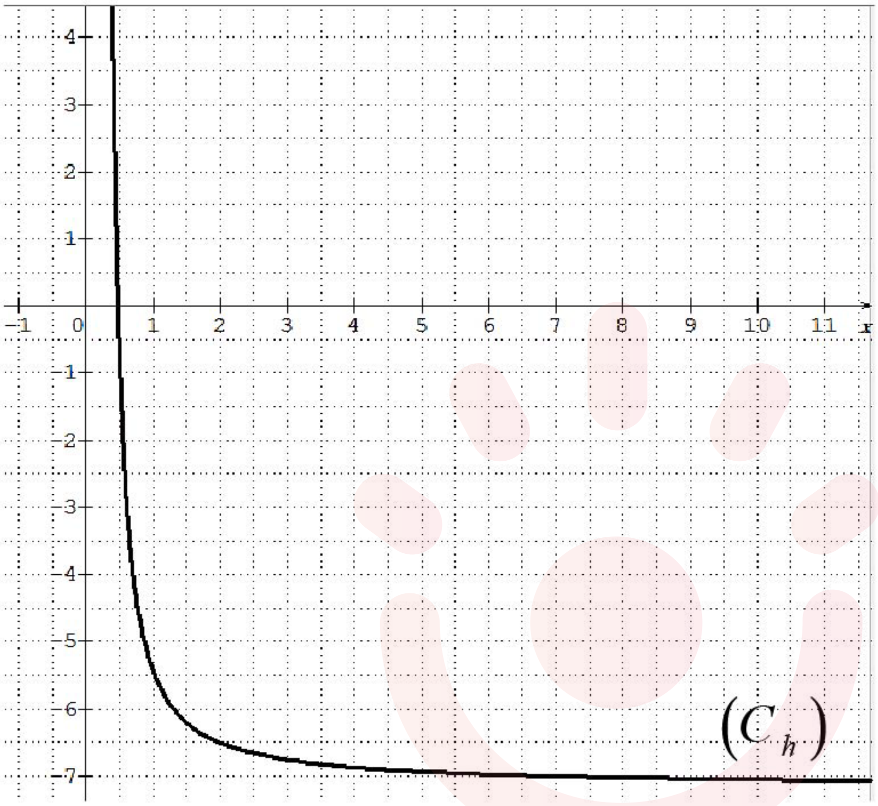
ج*/ عين اتجــاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

6) باستعمال : $\ln(1+X)\le X$ ، من أجل كل $X\in\left]0;+\infty\right[$

أ*/ استنتج أن : $0\le I+I_1\le \int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e} 2e^{-2(x-e)}\,dx-1+\ln 4$

ب*/ اعط حصرا للعدد $I+I_1$.

الملحق:



الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04) نقاط

$A(3;1;0)$ ، $B(1;2;0)$ ، $C(3;2;1)$ و $D(0;0;m)$

1) أ*/ حساب $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{BA}(2;-1;0)$ ، $\overrightarrow{BC}(2;0;1)$

لدينا : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=2(2)+0(-1)+1(0)=4$

***/ استنتاج القيمتين المضبوطتين لـ $Cos\widehat{ABC}$ و $Sin\widehat{ABC}$**

لدينا: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|Cos\widehat{ABC}$

ومنه: $Cos\widehat{ABC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{4}{\sqrt5\sqrt5}=\frac45$

لدينا: $\sin\widehat{ABC}^2=1-Cos\widehat{ABC}^2$

ومنه $\sin\widehat{ABC}=\frac35$ أو $\sin\widehat{ABC}=-\frac35$

ب*/ حساب مساحة المثلث ABC ولتكن S_{ABC}:

$S_{ABC}=\frac12 BA\times BC\times\sin\widehat{ABC}=\frac12\sqrt5\times\sqrt5\times\frac35=\frac32ua$

ج*/ نبين أن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع نـاظمي للمستوى (ABC)

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{BC}=1(2)+2(0)-2(1)=0$ وكذلك

$\vec n\cdot\overrightarrow{BA}=1(2)+2(-1)-2(0)=0$

فإن $\vec n(1;2;-2)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

***/ استنتاج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) :**

لدينا $(ABC):x+2y-2z+d=0$

$A\in(ABC)$ تكافئ $3+2+d=0$ تكافئ $d=-5$

ومنه: $(ABC):x+2y-2z-5=0$

د*/ تبيان أن $ABCD$ رباعي وجوه:

نبين أن النقطة D لا تنتمي الى المستوي (ABC)

لدينا $0+2(0)-2m-5=0$ أي $m=-\frac52$ إذن: $D\notin(ABC)$

لأن m عدد حقيقي موجب ومنه: $ABCD$ رباعي وجوه

***/ نبين أن حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو $V=\frac{2m+5}{6}uv$**

لدينا $V_{ABCD}=\frac13 S_{ABC}\times h$ ، $h=d\left(D,(ABC)\right)$ هو الارتفاع

$$d\left(D;(ABC)\right)=\frac{|-2m-5|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2m+5}{3}$$

ومنه $V=\frac13\times\frac32\times\frac{2m+5}{3}=\frac{2m+5}{6}uv$

أ*/ نبين أن (Q) هو المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$ معادلته الديكارتية $-2x+y=\frac{-5}{2}$: هناك عدة طرق منها

*إحداثيات $I(2;\frac32;0)$ منتصف $[AB]$ تحقق التمثيل الوسيطي لـ (Q) والشعاع $\overrightarrow{AB}(2,-1,0)$ عمودي على شعاعي توجيهه

$\vec{u'}(1;2;0)$ و $\vec u(-2;-4;-5)$ ومنه (Q) مستوي محوري لـ $[AB]$

***/تعيين معادلة (Q)** : لدينا:

$$(Q):\begin{cases}x=2-2\alpha+\beta....(1)\\ y=\frac32-4\alpha+2\beta....(2)\\ z=-5\alpha.....(3)\end{cases};(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$$ من (1) نجد $z=-5\alpha$

يكافئ $\alpha=\frac{z}{-5}$ بالتعويض في (1) نجد $x=2-2\left(\frac{z}{-5}\right)+\beta$

ومنه: $\beta=x-2-\frac{2z}{5}$ نعوض قيمة α و β في (2) نجد

$y=\frac32-4\left(\frac{z}{-5}\right)+2\left(x-2-\frac{2z}{5}\right)$ ومنه : $-2x+y=\frac{-5}{2}$

ومنه معادلة (Q) هي: $-4x+2y+5=0$

***/بطريقة آخرى:** (Q) يشمل $I\left(2;\frac32;0\right)$ منتصف $[AB]$

و $\overrightarrow{AB}(-2;1;0)$ شعاع ناظمي له والتمثيل الوسيطي يحقق

ومنه المستوي $(Q):-2x+y=\frac{-5}{2}$ المستوي المحوري لقطعة المستقيم $[AB]$

ب*/استنتاج ان المستويين (ABC) و (Q) متعامدان وهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيله الوسيطي:

بما أن $\vec n\cdot\overrightarrow{AB}=1.(-2)+2.(1)+0.(-2)=0$ فإن (Q)

و (ABC) متعامدان فهما متقاطعان وفق مستقيم (Δ)

***/تعيين التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :**

$$\begin{cases}x+2y-2z-5=0....(1)\\ -4x+2y+5=0......(2)\end{cases}$$ بطرح (2) من (1) نجد

نضع $z=t$ (t وسيط حقيقي) نجد $5x-2z-10=0$

$x=\frac{2}{5}t+2$ و $y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2}$ إذن

$$(\Delta):\begin{cases} x=\frac{2}{5}t+2 \\ y=\frac{4}{5}t+\frac{3}{2} ; t\in\mathbb{R} \\ z=t \end{cases}$$

ج*/ حساب $d(D;(Q))$ ثم استنتاج بدلالة m المسافة بين D و (Δ)

$$d(D;(Q))=\frac{|-4(0)+2(0)+5|}{\sqrt{16+4}}=\frac{5}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

بماأن (Q) و (ABC) متعامدان فإن حسب مبرهنة فيثاغورس

$$d(D;(\Delta))^2=d(D;(Q))^2+d(D;(ABC))^2$$

ومنه $d(D;(\Delta))=\sqrt{\frac{5}{4}+\left(\frac{2m+5}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{16m^2+80m+145}}{6}$

3)أ*/ تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي m (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها:

لدينا: $x^2+y^2+z^2-2mz+m^2-9=0$

ومنه : $x^2+y^2+(z-m)^2=9$ إذن (S_m) سطح كرة مركزها النقطة $D(0;0;m)$ و نصف قطرها $r=3$.

ب*/ تعيين m حتى يكون المستوي (ABC) مماسا لسطح الكرة (S_m) :

(ABC) مماس لسطح الكرة (S_m) يعني $d(D;(ABC))=3$ أي أن $\frac{2m+5}{3}=3$ ومنه : $m=2$

4) معادلة المستوى (P) الموازي تماما للمستوى (ABC) ويمس (S_m) :

لدينا: $(P): x+2y-2z+d=0$

المستوي (P) مماس لـ (S_m) يعني

$d(D;(P))=\frac{|-4+d|}{3}=3$ أي $|-4+d|=9$

ومنه : $d=13$ أو $d=-5$ هو المستوي (ABC)

إذن $(p): x+2y-2z+13=0$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)أ*/ إثبات أن: $y\equiv 4[11]$ ، $(E)...11x-5y=2$

$11x-5y=2$ يكافئ $5y=11x+2$ ومنه $5y\equiv -2[11]$ أي $5y\equiv 20[11]$ ومنه : $y\equiv 4[11]$

ب*/ استنتاج حلول المعادلة (E) :

$y\equiv 4[11]$ معناه $y=11k+4$ مع $k\in\mathbb{Z}$ ،نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد: $x=5k+2$

ومنه $S=\{(11k+4;5k+5)/k\in\mathbb{Z}\}$

2)أ*/ تعيين القيم الممكنة لـ $d=PGCD(a;b)$

$a=5n+2$ و $b=11n+4$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

$11a-5b=11(5n+2)-5(11n+4)=55n+22-55n-20=2$

ومنه : $d/2$ إذن : $d\in D_2=\{1;2\}$

ب*/ تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون: $PGCD(a;b)=2$

لدينا $PGCD(a;b)=2$ معناه 2 يقسم a و2 يقسم b معناه 2 يقسم $b-2a$

أي 2 يقسم $11n+4-2(5n+2)$ وبالتالي 2 يقسم n.

ومنه n عدد زوجي يكتب من الشكل: $n=2\alpha \,/\, \alpha\in\mathbb{N}^*$

ج*/ استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددان a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق

من أجل $PGCD(a;b)=2$ قيم n : $n=2\alpha \,/\, \alpha\in\mathbb{N}^*$

ومنه قيم n حيث $PGCD(a;b)=1$ هي : $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

3) أ*/ نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

$A=5n^2+7n+2$ و $B=11n^2+15n+4$ ، $n\in\mathbb{N}$

$A=(n+1)(5n+2)=a(n+1)$ ، $B=(n+1)(11n+4)=b(n+1)$

ومنه : $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

ب*/ استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B :

$$PGCD(A;B)=PGCD(a(n+1);b(n+1))=(n+1)PGCD(a;b)$$

ومنه نميز حالتين :

الحالة 1 :إذا كان $PGCD(a;b)=2$ معناه $n=2\alpha/\alpha\in\mathbb{N}^*$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1)2=4\alpha+2$

الحالة 2:إذا كان $PGCD(a;b)=1$ معناه $n=2\alpha+1/\alpha\in\mathbb{N}$

نجد : $PGCD(A;B)=(2\alpha+1+1)1=2\alpha+2$

التمرين الثالث: 5 نقاط

1)تعيين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :

$$\begin{cases} 2z_1+iz_2=1+i\sqrt{3}...(1) \\ (\sqrt{3}+2i)z_1-z_2=(1-\sqrt{3})i..(2) \end{cases}$$

نضرب طرفي المعادلة الأولى في (i) نجد

$$\begin{cases} -2iz_1+z_2=-i+\sqrt{3}......(1') \\ \sqrt{3}z_1+2iz_1-z_2=i-i\sqrt{3}...(2) \end{cases}$$

بجمع (1') و (2) : $\sqrt{3}z_1=\sqrt{3}(1-i)$ ومنه $z_1=1-i$

بالتعويض في (1) نجد : $z_2=2+\sqrt{3}+i$

2)أ*/كتابة z_A على الشكل الأسي : $z_A=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

ب*/نبين أن : $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$:

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}+i}{1-i}=\frac{(2+\sqrt{3}+i)(1+i)}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3})i}{2}$$

ومنه: $\frac{z_B}{z_A}=(1+\sqrt{3})\frac{(1+\sqrt{3}i)}{2}=(1+\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$

*/استنتاج الشكل الأسي للعدد z_B:

$z_B = z_A(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt2 e^{-i\frac{\pi}{4}}(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{3}}$

ومنه : $z_B=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}}$

ج*/تعيين قيم للعدد الطبيعي n حتى تكون صورة العدد $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ تنتمي إلى المنصف الأول إن وجدت :

لدينا : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=(1+\sqrt3)^n e^{i\frac{n\pi}{3}}$ معناه $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n=\frac{\pi}{4}+k\pi$ (

أي : $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n \equiv \frac{n\pi}{3}[2\pi]$ ومنه : $\frac{n\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ ، $k\in\mathbb{Z}$

أي $4n-12k=3$ ، $PGCD(12;4)=4$ لا تقسم 3 ومنه

المعادلة لا تقبل حلول اذن لايوجد قيم لـ n تحقق المطلوب .

3) أ*/إيجاد لاحقة النقطة B' صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

عبارة الدوران r من الشكل : $z'=e^{-i\frac{\pi}{6}}z$

$z_{B'}=e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B=e^{-i\frac{\pi}{6}}\sqrt2(1+\sqrt3)e^{i\frac{\pi}{12}}=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z_{B'}=\sqrt2(1+\sqrt3)e^{-i\frac{\pi}{12}}=\overline{z_B}=2+\sqrt3-i$

ب*/حساب مساحة الدائرة (γ) التي قطرها $[BB']$ لدينا

$S=\pi R^2$ ، $R=\frac{BB'}{2}=\frac{|z_{B'}-z_B|}{2}=\frac{|-2i|}{2}=\frac{2}{2}=1$

ومنه : $s=\pi\, u.a$

ج*/ تعيين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث:

$\arg\left[(z-z_B)^2\right]=\arg(z_B)-\arg(z_{B'})$ أي أن

$2\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ومنه $\arg(z-z_B)=\frac{\pi}{12}+k\pi$

تفسيرها : $(\vec u;\overrightarrow{BM})=\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}$

ومنه مجموعة النقط هي المستقيم (OB) ماعدا النقطة B.

د*/تعيين z_C لاحقة النقطة C حتى يكون الرباعي $AB'BC$ مستطيل:

$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg\left(\frac{z_A-z_{B'}}{z_B-z_{B'}}\right)=\arg(z_A-z_{B'})-\arg(z_B-z_{B'})$

$(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\arg(1-i-2-\sqrt3+i)-\arg(2i)=\pi-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

ومنه نجد : $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'A})=\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$

يكفي أن نبين : $\overrightarrow{B'B}=\overrightarrow{AC}$ معناه : $\begin{cases}x_C=1\\y_C=1\end{cases}$ ومنه $z_C=1+i$

بطريقة اخرى :لدينا $z_{B'}=\overline{z_B}$ معناه BوB' متناظرتان

بالنسبة لمحور الفواصل ولدينا : $A(1;-1)$ و $B'(2+\sqrt3;-1)$

أي : AوB' لهما نفس الترتيب معناه ينتميان إلى المستقيم

معادلته $y=-1$ موازي لمحور الفواصل ومنه نجد :

$z_C=\overline{z_A}=1+i$

*/ إيجاد z_I لاحقة مركز ثقل المستطيل $AB'BC$

ومنه $z_I=\frac{z_A+z_B+z_{B'}+z_C}{4}$ ، $z_I=\frac{1-i+4+2\sqrt3+1+i}{4}=\frac{3+\sqrt3}{2}$

4 أ*/تعيين العبارة المركبة للتشابه المباشر S حيث يكون

f تشابه مباشر مركزه O ونسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$: $f=ros$

S تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته θ أي ros

تشابه مباشر مركزه O ونسبته k وزاويته $\theta-\frac{\pi}{6}$

ومنه : $k=2$ و $\theta-\frac{\pi}{6}\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ أي $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

ومنه عبارة التشابه S هي : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$ ونكتب $z'=2iz$

ب*/إيجاد مساحة صورة الدائرة (γ) بالتشابه المباشر S :

مساحة صورة الدائرة (γ) هي S' حيث: $s'=k^2s=4\pi\, ua$

5) أ*/ إذا كان $S(M)=M'$، إيجاد طبيعة المثلث OMM':

ومنه : $z'=2e^{i\frac{\pi}{2}}z$: $\frac{z'}{z}=2e^{i\frac{\pi}{2}}$ معناه $\arg\frac{z'}{z}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

معناه $(\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و $\left|\frac{z'}{z}\right|=2$ أي $|z'|=2|z|$

معناه $\|\overrightarrow{OM'}\|=2\|\overrightarrow{OM}\|$ ومنه :المثلث OMM' قائم في O

ب*/تعيين مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ ، $\overrightarrow{AM}(z-z_A)$ ، $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$

و $\overrightarrow{AM'}(z'-z_A)$ أي $\overrightarrow{AM'}(2iz-z_A)$ ومنه $\overrightarrow{AM'}(-2y-1;2x+1)$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AM'}=0$ معناه $(x-1)(-2y-1)+(y+1)(2x+1)=0$

معناه $x+3y+2=0$

مجموعة النقط المطلوبة هي مستقيم معادلته $x+3y+2=0$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1)أ*/التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$f(x)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

$f(x)=x-e+\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=x-e+\ln\left(\frac{e^{2(x-e)}+2}{e^{2(x-e)}}\right)$

$=x-e+\ln\left(e^{2(x-e)}+2\right)-\ln\left(e^{2(x-e)}\right)=-x+e+\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)$

ب */ حساب النهايات $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

ج*/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{1-2e^{-2(x-e)}}{1+2e^{-2(x-e)}}$

$f'(x)=0$ معناه $1-2e^{-2(x-e)}=0$ معناه $x=e+\ln\sqrt{2}$

x	$-\infty$	$e+\ln\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

الدالة f متزايدة تماما على $[e+\ln\sqrt{2};+\infty[$

الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;e+\ln\sqrt{2}]$

تشكيل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	$\ln2/2+e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$3\ln2/2+e$	↗ $+\infty$

2) أ*/ نبين أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين (D) و (D')

معادلتاهما: $y=x-e$ و $y=-x+\ln2+e$ عند $+\infty$

وعند $-\infty$ على الترتيب: بما أن

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-e)]=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)=\ln1=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+e+\ln2)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2\right]=0$$

فإن: (D) مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$

و (D') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $-\infty$

ب*/ دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (D) و (D')

لدينا: $f(x)-(x-e)=\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)$

$1+2e^{-2(x-e)}\succ1$ معناه $\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\succ\ln1=0$

ومنه: $f(x)-(x-e)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D)

لدينا: $f(x)-(-x+e+\ln2)=\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)-\ln2$

$2+e^{2(x-e)}\succ2$ معناه $\ln\left(2+e^{2(x-e)}\right)\succ\ln2$ ومنه

$f(x)-(-x+e+\ln2)\succ0$ إذن (C_f) يقع فوق م.م (D')

من أجل كل عدد حقيقي x

ج*/ نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=\frac{1}{2}\ln2+e$ **هو محور تناظر للمنحنى (C_f):**

من أجل كل x من ℝ: $\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)$ من ℝ، لدينا

$$f\left(2\left(\frac{\ln2}{2}+e\right)-x\right)=f(\ln2+2e-x)$$

$$=-x+e+\ln(2+e^{2(x-e)})=f(x)$$

ومنه: $(\Delta):x=\frac{1}{2}\ln2+e$ محور تناظر للمنحنى (C_f)

3 رسم (Δ)، (D)، (D') و (C_f).

4 أ*/ نبين أن جميع المستقيمات (D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$:

$(D_m):y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$

حيث m وسيط حقيقي.

$y=mx-m\left(e+\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}$ معناه

$m\left(x-e-\frac{\ln2}{2}\right)+\frac{\ln2}{2}-y=0$ معناه

$x-e-\frac{\ln2}{2}=0$ و $\frac{\ln2}{2}-y=0$ ومنه: جميع المستقيمات

(D_m) تشمل النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

ب*/ مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (D_m) و المنحنى (C_f)

المستقيم (D_m) يدور حول النقطة الثابتة $A\left(\frac{\ln2}{2}+e;\frac{\ln2}{2}\right)$

إذا كان $m=1$ فإن (D_m) هو (D) لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=-1$ فإن (D_m) هو (D') لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m=0$ فإن (D_m) هو $(D_0):y=\ln\sqrt{2}$ لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-1;1[$ فإنه لاتوجد نقط تقاطع

إذا كان $m\in]-\infty;-1[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

إذا كان $m\in]1;+\infty[$ فإنه توجد نقطة تقاطع واحدة

5) أ*/ التفسير الهندسي العدد I: هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=\ln\sqrt{2}+e$ ، $x=\ln\sqrt{3}+e$

حساب العدد I_1: $I_1=\int_0^1\ln(1+X)dX$ بالمكاملة بالتجزئة

بوضع: $u(X)=\ln(1+X)$ ، $u'(X)=\frac{1}{1+X}$

$v'(X)=1$ ، $v(X)=X$

$$I_1=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1\frac{X+1-1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)]_0^1-\int_0^1 1dX+\int_0^1\frac{1}{X+1}dX$$

$$=[X\ln(1+X)-X+\ln(1+X)]_0^1=\ln4-1$$

ب*/ نبين أن $0\le I_n\le\ln2$: لدينا $I_n=\int_0^1\ln(1+X^n)dX$

$0\le X\le1$ معناه $1\le X^n+1\le2$ معناه $0\le\ln(X^n+1)\le\ln2$

ومنه: $0\le\int_0^1\ln(X^n+1)dX\le\int_0^1\ln2dX$ اذن $0\le I_n\le\ln2$

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le1\ldots(1)\\0\le X^n\le1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

($0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ أي أن

$0\le\int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le\int_0^1\ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0\le I_n\le \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

ج*/تعيين اتجاه تغير المتتالية (I_n) ثم استنتاج أنها متقاربة:

$\begin{cases}0\le X\le 1...(1)\\ 0\le X^n\le 1\end{cases}$ بضرب أطراف المتباينة (1) في X^n نجد

$0\le X^{n+1}\le X^n$ أي $0\le X^{n+1}+1\le X^n+1$

$0\le \ln\left(X^{n+1}+1\right)\le \ln\left(X^n+1\right)$ ، $n\in\mathbb{N}^*$ أي أن

$0\le\int_0^1 \ln\left(X^{n+1}+1\right)dX\le\int_0^1\ln\left(X^n+1\right)dX$ نستنتج أن

$0\le I_{n+1}\le I_n$ ومنه: المتتالية (I_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$

بما ان (I_n) محدودة من الاسفل بالصفر ($0\le I_n\le \ln 2$)

ومتناقصة تماما فإنها متقاربة نحو الصفر

6) باستعمال: $\ln(1+X)\le X$ ، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

أ*/ استنتاج أن : $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

$\ln(1+X)\le X$ ، من اجل كل $X\in]0;+\infty[$

لدينا: $1+2e^{-2(x-e)}\succ 0$ بوضع: $X=1+2e^{-2(x-e)}$ نجد:

$0\le\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)\le 2e^{-2(x-e)}$ وبالتالي

$$0\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}\ln\left(1+2e^{-2(x-e)}\right)dx\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx$$

ومنه: $0\le -1+\ln 4\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

اذن: $0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$

ب*/ اعطاءحصرا للعدد $I+I_1$:

$$0\le I+I_1\le\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx-1+\ln 4$$

$$\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}2e^{-2(x-e)}dx=-\int_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}-2e^{-2(x-e)}dx=-\left[e^{-2(x-e)}\right]_{\ln\sqrt{2}+e}^{\ln\sqrt{3}+e}=\frac{1}{6}$$

$0\le I+I_1\le\frac{1}{6}-1+\ln 4$ ومنه: $0\le I+I_1\le\frac{-5}{6}+\ln 4$

3) رسم (Δ) ، (D) ، (D') و (C_f).